Aula 4

Produto Externo (em $\mathbb{R}^3$)

Definição: Designa-se por **produto externo**, e representa-se pelo símbolo $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, a operação $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3) &= (a_2b_3-a_3b_2,\, a_3b_1-a_1b_3,\, a_1b_2-a_2b_1)\\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{e_2} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{e_3}\\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Propriedades: Para quaisquer $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$, tem-se

i) $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$

ii) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ (antisimetria)

iii) $(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\alpha\,\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\beta\,\mathbf{b}\times\mathbf{c}$
$\mathbf{a}\times(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c})=\beta\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\gamma\,\mathbf{a}\times\mathbf{c}$
$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ (bilinearidade)

iv) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$

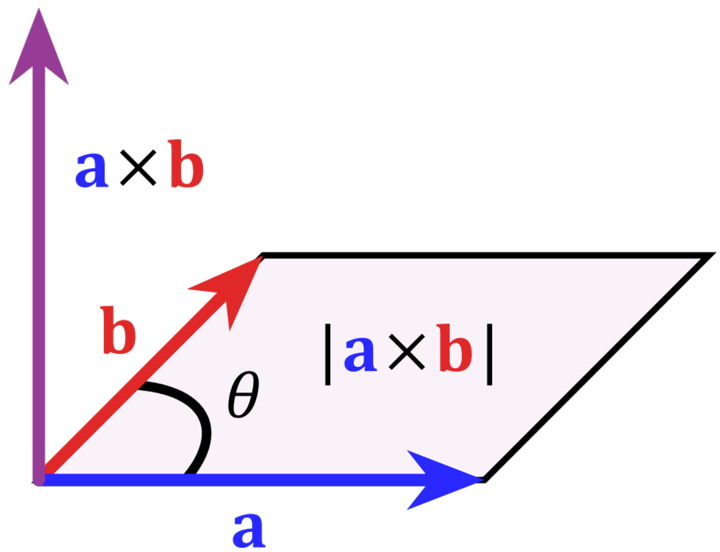
v) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=0,\quad(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=0$
($\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$)

vi) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

vii) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta$,
em que $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo formado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Área do paralelogramo formado por $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$A = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen}\theta = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$



Definição: Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, ou seja, uma variedade de dimensão 2, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, e seja $\phi : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo sobre a superfície. Então, define-se o **integral de ϕ sobre a superfície S**, e designa-se por

$$\int_S \phi \quad \text{ou} \quad \int_S \phi \, dS,$$

o valor

$$\int_\Omega \phi(g(u,v)) \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du \, dv,$$

sempre que este integral (calculado sobre $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$) exista.
Em particular, fazendo $\phi = 1$, obtém-se a área da superfície S

$$A(S) = \mathrm{Vol}_2(S) = \int_S 1 \, dS = \int_\Omega \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| du \, dv.$$

Propriedade: Sejam $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, e considere-se a matriz

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = (\det \Delta^T \Delta)^{1/2}.$$

O integral duma função ϕ sobre uma superfície S pode portanto também ser calculado como

$$\int_S \phi \, dS = \int_\Omega \phi(g(u,v))(\det Dg(u,v)^T Dg(u,v))^{1/2} du \, dv.$$

Definição: Dada uma parametrização $g : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ duma variedade de dimensão m, designa-se por **forma ou elemento de volume-m** a função

$$(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} = \sqrt{\det G(u)},$$

para $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, e em que

$$G(u) = Dg(u)^T Dg(u),$$

é a chamada **matriz da métrica da variedade** formada pelos produtos internos das derivadas direcionais da parametrização

$$G_{i,j}(u) = \frac{\partial g}{\partial u_i}(u) \cdot \frac{\partial g}{\partial u_j}(u), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Definição: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão m, parametrizada (globalmente) por $g : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, e seja $\phi : M \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo sobre a variedade. Então, define-se o **integral de ϕ sobre a variedade M**, e designa-se por

$$\int_M \phi \quad \text{ou} \quad \int_M \phi \, dV_m,$$

o valor

$$\int_\Omega \phi(g(u))(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du,$$

sempre que este integral (calculado sobre $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$) exista. Em particular, fazendo $\phi = 1$, obtém-se o volume m-dimensional da variedade M

$$\mathrm{Vol}_m(M) = \int_M 1 \, dV_m = \int_\Omega (\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du.$$

Invariância do integral para diferentes parametrizações

Proposição: Se uma mesma variedade M é parametrizada (globalmente) por duas parametrizações diferentes, digamos, $g : u \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$ e $h : v \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m \to M \subset \mathbb{R}^n$, então $h^{-1} \circ g : \Omega \to \Lambda$ é uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^m$ e tem-se a relação entre os elementos de volume das duas parametrizações

$$(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} = (\det Dh(v)^T Dh(v))^{1/2} \left| \det \frac{\partial v}{\partial u} \right|,$$

pelo que o integral sobre M é invariante

$$\int_\Omega \phi(g(u))(\det Dg(u)^T Dg(u))^{1/2} du =$$
$$= \int_\Lambda \phi(h(v))(\det Dh(v)^T Dh(v))^{1/2} dv.$$